Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,
Sayı 31 (Ocak 2012/I), ss. 93-105

Fonksiyon Kavramı: Tanımsal Bilginin Kavramın Çoklu Temsillerine Transfer Edilebilmesi ve Bazı Kavram Yanılgıları

Alattin Ural *

Özet

Bu çalışma, öğrencilerin fonksiyon tanım bilgilerini çeşitli fonksiyon temsillerine aktarabilme yeterliklerini ve bu transfer sürecini olumsuz etkileyen nedenleri belirlemek amacıyla yapılmıştır. Araştırmaya Ankara'da bir Anadolu lisesindeki iki tane 9. sınıftan toplam 59 öğrenci alınmıştır. Öğrencilerden fonksiyon kavramını tanımlamaları, çeşitli şekillerde temsil edilmiş bağıntılardan fonksiyon olanı bulmaları ve nedenini açıklamaları istenmiştir. Yanıtların analizinde betimsel analiz yapılmıştır. Elde edilen bulgular; öğrencilerin fonksiyon kavramı tanımlamalarının genel olarak, "Fonksiyonunun formal tanımı", "İki küme arasında herhangi bir eşleme" ve "Bir dönüştürme işlemi" şeklinde olduğunu göstermiştir. Ayrıca gerekli tanım bilgisine sahip olmamanın ve çeşitli temsillere ait çeşitli kavram yanılgılarının transfer sürecini olumsuz etkilediği görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: *Fonksiyon kavramı, Fonksiyon temsilleri, kavram görüntüsü.*

Concept of Function: Transferring the Definitional Knowledge to Multiple Representations and Some Misconceptions

Abstract

The aim of this research is to determine students' competencies of transferring their definitional knowledge of function into multiple representations of the concept. This study was conducted to 59 ninth grade students. The data were obtained from the questions of "Define the concept of function" and from the six questions requiring students to find the functions ones within the given relations in different representations. Descriptive analyses was used to analyze the data. The findings showed that students' knowledge of function are usually "formal definition", "any matching between two sets" and "converting process". Besides, it is seemed that not having the necessary definitional knowledge of the concept and various misconceptions regarding several represantations has negatively affected the transferring process.

Key Words: *Function concept, multiple representations, concept image.*

Giriş

Matematiğin temel ve birleştirici bir fikri olan fonksiyon (Altun, 1999; Sajka, 2003), anlaşılmasında çeşitli zorlukların olduğu bir kavramdır (Hauge, 1993; Gaea, Orit ve Kay, 1990; Malara ve Iaderosa, 1999; Sierpinska, 1992; Ural, 2006). Sierpinska (1992) fonksiyonun tanım kümesi, değer kümesi, görüntü kümesi, fonksiyonun tersi, değişken kavramı, bağımlı ve bağımsız değişkenler, koordinatlar, fonksiyonun grafiği, tablosu, fonksiyonun kuralı gibi konularda öğrencilerin zorluk çektiğini belirtmiştir. Fonksiyon

* Yrd. Doç. Dr, Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı, Burdur. e-posta: altnurl@gmail.com

kavramına ilişkin güçlük ve yanılgılar genel olarak; kavramın tanımına ilişkin, temsil ve aralarındaki ilişkilere ilişkin ve kavramda kullanılan matematiksel dile ilişkin olmak üzere üç sınıfta belirtilebilir (Kabael, 2010).

Fonksiyon kavramı kuramsal açıdan iki şekilde ele alınır: Tall ve Vinner (1981) ve Vinner (1983) tarafından belirtilen kavram tanımı ve kavram görüntüsü. Kavram tanımı, kavramın matematiksel tanımıdır, kavram görüntüsü (imajı) ise, zihinde kavramla ilgili bütün resimleri, özellikleri ve işlemleri kapsayan bilişsel yapının tamamıdır (Tall & Vinner, 1981:152). Kavramın formal tanımına ilişkin yanılgılar, öğrencilerin fonksiyon kavramını eksik ya da hatalı biçimde, örneğin "bir eşleme" , "bir formül" ya da "bir denklem" gibi tanımlamalarından kaynaklanmaktadır (Kabael, 2010). Öğrenciler genellikle fonksiyonu taşıma eylemiyle ilişkilendirerek bir formül olarak algılarlar (Breidenbach ve dig., 1992; Graham & Ferrini-Mundy, 1990). Sierpinska (1992) tarafından yapılan bir çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili belli başlı anlama kategorileri şu şekilde ortaya çıkarılmıştır.

1. Fonksiyonu nümerik denklemler ve bilinmeyenler olarak düşünme,
2. Fonksiyonu yeni bir işleme veya düşünmeye başlama noktası olarak görme (Bir denklemi belirtme başlangıcı olarak görme). Böylece fonksiyonu bir denklemi çözmeyle ilişkilendirme,
3. Fonksiyonu bir formül olarak değerlendirme,
4. Fonksiyonu bir işlem süreci olarak görme (Bir sayı verildiğinde yeni bir sayı bulma) ve
5. Grafik çizmeye yarayan bir çeşit formül olarak görme.

Vinner ve Dreyfus (1989) tarafından yönetilen diğer bir çalışmada da, öğrencilerin fonksiyonu tanımlamaları istenmiş ve alınan cevaplar altı kategoride toplanmıştır.

1) Formal Drichlet-Bourbaki tanımı, Eşleme: Fonksiyon, birinci kümedeki her elemanı ikinci kümede tek bir elemana eşleyen bir eşlemedir.
2) İki değişken arasındaki bir bağımlılık bağıntısı,
3) Belirli bir ölçüde düzenlilik gerektiren bir kural, "x değerini y değerine bağlayan bir şey"
4) Bir işlem veya işlem süreci,
5) Bir formül, cebirsel ifade veya denklem,
6) Bir grafik veya sembolik formdaki bir gösterim.

Dede, Bayazit ve Soybaş (2010) tarafından yapılan çalışmada öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkilere ait bilgi düzeyleri ve kavram imajları araştırılmıştır ve dört kategori oluşturulmuştur.

1) Küme eksenli doğru tanımlar (%45). Bu gruptaki ifadeler, fonksiyonu tanım kümesinin her elemanını değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyen bağıntı olarak tanımlamaktadır.
2) Küme eksenli yarı-doğru tanımlar (%42). Bu gruptaki ifadeler, fonksiyonu eşleme yapan bir bağıntı olarak tanımlamış, fakat fonksiyon olma şartlarını belirtmemiştir.
3) Cebirsel tanımlar (%6). Fonksiyonu, değişkenler arasındaki ilişki olarak algılayan ifadeler. "Fonksiyonun, cebirsel bir ifadedeki bilinmeyenlerden (değişkenlerden) birindeki değişime karşın diğer değişkendeki oluşan değişimi ifade eder" biçiminde ifade edilmesi.
4) Dönüştürme (transformasyon) mantığı içeren tanımlar (%7). Bu ifadeler, fonksiyonu dönüştürme yapan bir cebirsel veya aritmetiksel mekanizma olarak algılamaktadır.

Öğrenciler problem çözümlerinde bazen fonksiyonun formal tanımına göre hareket etmezler. Even (1990, 1993), Vinner (1983), Vinner ve Dreyfus (1989) öğrencilerin formal tanımı problem çözerken pek kullanmadıklarını, Bakar ve Tall (1992), Malik (1980) ise öğrencilerin fonksiyon kavramı anlamlandıramadıklarını belirtmiştir. Bu durumda öğrenciler kavramın tanımına

ve farklı temsillerine kişisel anlamlar yükleyebilmektedirler (örn. Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989).

Matematik öğretiminde bir kavramın çoklu gösterimleri üzerinde durulması kavramsal bilgi açısından oldukça önemlidir. Fonksiyonların çoklu temsilleri üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır (Akkoç, 2005; 2006; Brenner ve diğerleri. 1997; Confrey, 1994; Kaput, 1992; Keller ve Hirsch, 1998; Leinhardt ve diğerleri, 1990). Akkoç (2006), öğrencilerin farklı temsiller için sahip oldukları kavram görüntülerinin kaynağının temsillerin prototip veya örneklem demeti (doğrusal, üstel, logaritmik, trigonometrik vb. fonksiyonlar) olarak verilmesi ile ilişkili olduğunu tespit etmiştir. Thompson (1994) öğrencilerin fonksiyon tanımındaki ifadelerin fonksiyonun tüm temsil biçimlerinde kullanıldığını fark etmediklerini ve her temsil biçimini bağımsız olarak gördüklerini belirtmiştir. Akkoç (2003), başarılı öğrencilerin tanımsal özellikleri tüm temsil biçimlerinde daha başarılı şekilde kullanabildiklerini, daha az başarılı öğrencilerin sadece Venn kümesi şeklinde verilen kümelerin eşlenmesi durumunda ve sıralı ikililer kümesi şeklinde verilen bir bağıntı durumunda tanımsal özellikleri kullanarak fonksiyon olup olmadığını belirleyebildiklerini, zayıf öğrencilerin ise tanımsal özelliklere odaklanamadıklarını belirlemiştir. Akkoç (2005) tarafından yapılan diğer bir çalışmada, öğrencilerin farklı temsiller için tanımsal özellikleri kullanımlarının farklılık gösterdiği ve tanımsal özellikleri bütün temsiller için kullanan öğrencilerin temsiller arası dönüşümlerde daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Diğer taraftan, öğrencilerin sözel tanımı, özellikle küme eşlemesi diyagramları ve sıralı ikili kümeleri için daha başarılı şekilde kullandıkları, grafik ve denklem temsillerinde ise en başarılı öğrencilerin bile daha fazla zorlandıkları gözlemlenmiştir.

Bilindiği üzere matematik eğitimde kavramsal öğrenme, tanımsal olarak ve temel özellikleriyle öğrenilen bir kavramı, çeşitli temsil durumlarında da anlamayı gerektirir. Bunun için öğrencilerin tanımsal bilgilerini kavramın çeşitli gösterimlerine transfer edebilmeleri beklenir ve bu beklentinin karşılanmasına, bu yönde yapılacak öğretim etkinliklerine bağlıdır. Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik edindikleri tanımsal bilgilerini, kavramın hangi gösterim biçimlerine ne ölçüde transfer edebildikleri ve bu transfer sürecini olumsuz etkileyen kavram yanılgıları gibi faktörlerin neler olduğunun ortaya konularak bu yönde yapılacak öğretim etkinliklerinin düzenlenmesine ve bu çerçevede matematik eğitimi literatürüne bir katkı sunmaktır.

Yöntem

Örneklem

Bu araştırmanın katılımcılarını, bir Anadolu lisesinde bulunan ve özel olarak seçilmeyen iki tane 9. sınıftan toplam 59 öğrenci oluşturmuştur.

Veri Toplama Araçları

Öğrencilerin fonksiyon kavramının tanımını yazmaları istenmiş ayrıca fonksiyon tanım bilgilerini bir bağıntının fonksiyon olup olmadığının teşhis edilmesi durumuna ne ölçüde transfer edilebildiklerini belirlemek için de "sıralı ikililer kümesi", "cebirsel formül", "sözel ifade", "tablo", "grafik", "gerçek yaşam durumu" şeklinde ifade edilmiş altı tane çoktan seçmeli soru sorulmuştur. Ayrıca bu çoktan seçmeli sorulara verdikleri yanıtın nedenini de açıklamaları istenmiştir. Her gösterim biçiminde aynı bağıntılar kullanılmaya çalışılarak, sadece gösterim biçiminin tek faktör olması sağlanmıştır.

Testin oluşturulması aşamasında bir matematik öğretmeni ve matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim elemanı ile beraber düşünülmüş ve ortak yargıya varılarak hareket edilmiştir. Araştırmanın amacı kavramın farklı temsillerine transfer sürecini incelemek olduğundan kavramın tüm temsil biçimlerine yönelik sorular hazırlanarak kapsam geçerliği sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin sadece ilgili gösterimde fonksiyon tanımını kullanarak fonksiyon olanı bulabilmesi önemsendiğinden, sorunun işlemsel zorluğunun olmaması veya farklı matematiksel düşünmeler gerektirmemesi önemsenmiş ve testin homojen olması sağlanmaya çalışılmıştır. Bu sorular anlaşılabilirliğin ve çözülme süresinin belirlenmesi amacıyla aynı yapıda farklı bir okuldaki bir grup öğrenciye verilerek ölçme aracına son hali verilmiştir.

Verilerin Analizi

Verilerin analizinde şu sıra izlenmiştir: Verilerin kodlanması, temaların bulunması, kodların ve temaların düzenlenmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması. Verilerin kodlanması aşamasında Tablo 1 kullanılarak, bir matematik öğretmeni ve öğretim elemanı ile beraber öğrencilerin yanıtları kodlanmış ve daha sonra kodlamalar karşılaştırılmıştır. İncelenecek verilerin matematiksel olması kodlama işlemlerinde önemli farklılıkların ortaya çıkmamasında şüphesiz etkili bir faktördür ancak yine de ortaya çıkan az sayıda farklılık ortak bir yargıya varılarak tekrar kodlanmış ve sonuçların güvenilir olması sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin "Fonksiyon kavramının tanımını yazınız" sorusuna verdikleri yanıtlar genel olarak incelenmiş ve öğrencilerin yanıtlarının çok büyük oranda sözel ifadelerden oluştuğu, az sayıda karşılaşılmış olan sembolik ifadenin ise oldukça anlamsız olduğu görülmüştür. Bunun üzerine kodlama sürecinde, fonksiyon kavramının sözel tanımında geçen anahtar kelimelerin kullanılma derecesi göz önüne alınmıştır. "Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin elemanlarına, bir elemanın tek bir görüntüsü olması şartıyla eşleyen bir bağıntı" şeklinde ifade edilebilecek fonksiyon kavramı tanımında kullanılması gereken temel ifadelerin "her eleman (1)", "yalnızca bir elemana (2)", "bağıntı (3)", "eşleme (0)" olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda fonksiyon tanımında geçen bu anahtar ifadeler kodlanmıştır. Buna göre 0, 1, 2, 3 kodlarının bir kombinasyonundan oluşan tanımlamalar anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde bütünleştirilerek temalar oluşturulmuş ve bu ifadeler Tablo 1' de gösterilmiştir. Eğer öğrenci ifadesinde sadece "eşleme" kelimesini kullanmışsa F0; sadece "her eleman" kullanmışsa F1, sadece "yalnızca bir elemana" kullanmışsa F2, sadece "bağıntı" kullanmışsa F3, 1 ve 2 ifadelerini kullanmışsa F12, vb. şekilde F0, F1, F2, F3, F12, F13, F23, F123 temaları oluşturulmuştur. Bunun haricinde fonksiyon tanımında yer almayan ancak öğrencilerce kullanılmış "değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak şekilde" ifadesi "4" ile kodlanarak diğer 0, 1, 2, 3 ifadeleriyle birlikte kullanılması durumuna göre (örneğin F34, F14) öğrencilerin fonksiyon tanımlamaları kodlanmıştır. Dolayısıyla yapılan kodlamanın türü "genel bir çerçeve içinde yapılan kodlama" dır (Yıldırım ve Şimşek, 2006:232). Buna göre verilerin analizinde önce genel bir kavramsal yapı oluşturularak bu yapıya göre kodlamalar yapılır ancak ortaya çıkan yeni kodlar listeye eklenir.

Diğer taraftan, öğrencilere sıralı ikililer kümesi, grafik, tablo, cebirsel formül, sözel ifade ve gerçek yaşam durumu şeklinde ifade edilmiş bağıntılardan fonksiyon olanları teşhis etmeleri ve nedenlerini yazmaları istenmiştir. Böylece öğrencilerin tanımsal bilgilerini kavramın çeşitli gösterimlerine aktarabilme yeterlikleri ve bu transferin yapılamama nedenleri belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için yanlış yanıtlar incelenerek, anlam açısından benzer olanlar gruplanmış ve ortak bir ifade yazılmıştır. Yanlış yanıt veren öğrencilerin fonksiyon tanımlamaları incelenerek bu bilgilerini bu soruyu doğru yanıtlayabilmesi açısından yeterli olup olmadığı, yeterli ise transfer edip edemediği açısından da bulgular verilmiştir.

İşlem

Her iki sınıfta da "Sıralı ikili, Kartezyen çarpım, Bağıntı, Fonksiyon" ünitesi araştırmacı tarafından yaklaşık 8 hafta boyunca işlenmiştir. Kavramlar işlenirken, kavramsal ve işlemsel bilgilere tamamıyla yer verilmiş, kavramların kendi aralarındaki ilişkilere, gerçek yaşamdaki örneklerine yeterince yer verilmiştir. Ünite biriminden yaklaşık 3 hafta sonra ölçme aracı öğrencilere iki ayrı sınıfta aynı zamanda uygulanmıştır.

Bulgular

Öğrencilerin Fonksiyon Kavramı Tanımlamaları

Öğrencilerin "Fonksiyon kavramının tanımını yazınız" sorusuna verdikleri yanıtların yüzdelikleri Tablo 1' de verilmiştir.

Tablo 1. Öğrencilerin fonksiyon kavramı tanımlamalarına ait yüzdelikler (N=59)

F123 Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin elemanlarına, bir elemanın tek bir görüntüsü olması şartıyla eşleyen bir bağıntı	%24
F12 Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin elemanlarına, bir elemanın tek bir görüntüsü olması şartıyla eşleme	%19
F13 Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin elemanlarına eşleyen bir bağıntı	%10
F23 Tanım kümesindeki elemanların değer kümesinin elemanlarına bir elemanın tek bir görüntüsü olması şartıyla eşleyen bir bağıntı	%2
F0 İki küme arasında bir eşleme	%9
F1 Tanım kümesindeki her bir elemanın değer kümesinin elemanlarına eşleme	%5
F2 Tanım kümesindeki elemanların değer kümesinin elemanlarına bir elemanın tek bir görüntüsü olması şartıyla eşlenmesi	%3
F3 İki küme arasındaki bir bağıntı ya da eşleyen bir bağıntı	%5
F34 Tanım kümesinin elemanlarını değer kümesinin elemanlarına, değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak şekilde eşleyen bir bağıntı	%2
D Bir şeyin bir işleme girip başka bir şey olarak çıktığı bir dönüşüm süreci, dönüştürme işlemi. (Buğdayın una, unun hamura, hamurun ekmeğe, yoğurdun ayrana, çileğin reçele, ineğin ete, etin kıymaya, bir sayının başka bir sayıya dönüşümü verilen örneklerdendir)	%7
Anlamsız Sembolik İfade	%9
Yanıtsız	%7

Tablo 1 incelendiğinde, öğrencilerin fonksiyon kavram tanımlamaları üç kategoriye ayrılabilir:

(I) "1","2", "3" ve "4" kodlu ifadelerin bir kombinasyonu olarak ifade etme (F123, F12, F13, F23, F34, F1, F2) (%64)

(II) İki küme arasında herhangi bir eşleme/ bağıntı olarak ifade etme (F0, F3), (%14)

(III) Bir dönüştürme süreci olarak ifade etme (D) (%7)

Yanıt veren öğrencilerin %91' i sözel ifadeleri tercih ettiği, sembolik ifadeyle anlatmaya çalışanların (%9) tamamının başarısız olduğu görülmüştür.

Cebirsel Gösterim

Soru 2. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi/ hangileri fonksiyon değildir?

A) $f:=\{(x,y): y=0, x,y\in R\}$ B) $g=\{(x,y): y=50-x , x,y\in N\}$ C) $h=\{(x,y): y=x^2, x,y\in R\}$

D) $k=\{(x,y): y=\sqrt{x} , x,y\in R^+\}$ E) $p= \{(x,y): |y|= x, x,y\in R\}$

B seçeneğinde F1 bilgisi, E seçeneğinde F1 veya F2 tanımsal bilgilerinin transfer edilip edilemeyeceği yoklanmak istenmiştir. Öğrencilerin yanıtlarına bakıldığında; B(34, %58), E(7, %12), A(11, %19), C(4, %7), D(2, %3) şeklinde bir dağılımın olduğu görülmüştür.

Bu soruyu doğru yanıtlamak için gerekli olan minimum tanım bilgisi F1 ifadesidir. Yanlış cevap verenlerin fonksiyon tanımını bilme durumları araştırıldığında; 58 kişiden 10' unun gerekli tanım bilgisine sahip olduğu ancak transfer edemediği anlaşılmaktadır (%17).

A seçeneğini işaretleyen ve açıklama yapan 9 kişiden 7' si y' nin x' li bir ifadesinin veya bir kuralın olmamasını, 1 kişi görüntü kümesi olmamasını, 1 kişi de x' in birden fazla elemanla eşleşebileceğini gerekçe göstermiştir. C seçeneğini işaretleyen ve açıklama yapan 3 kişi, 2 ve -2 sayılarının 4 sayısıyla eşlemesini, 1 kişi x ve y sayıları pozitif reel sayılarla sınırlı olmasını, D seçeneğini işaretleyen 1 kişi ise x ve y' nin pozitif reel sayılar olmasını gerekçe göstermiştir.

Liste Yöntemi-Sıralı İkililerle Gösterim

Öğrencilerin bir fonksiyonu, sıralı ikililer kümesi yöntemiyle gösterilmesi durumunda teşhis edebilme davranışlarını belirlemek için hazırlanan soru şöyledir:

Soru 3. A={1, 2, 3}, B={a, b, c} olmak üzere aşağıdaki bağıntılardan hangisi A' dan B' ye fonksiyon değildir?

A){(1,a),(2,a),(3,b)} B){(1,a),(2,a),(3,a)} C){(1,c),(2,d),(1,b)} D){(1,c),(2,b),(3,a)}

Öğrencilerin yanıtlarına bakıldığında, hiçbir öğrencinin bu soruda başarısız olmadığı görülmüştür. Bu durum liste yöntemiyle verilmiş bir bağıntının fonksiyon olup olmadığının kontrol edilmesinin matematiksel bir işlem veya düşünce gerektirmemesinden sadece tanımsal bilginin basit bir kontrolünden ibaret olmasından kaynaklanıyor olabilir.

Fonksiyonun Sözel Olarak İfade Edilmesi Durumu

Öğrencilerin bir fonksiyonun sözel olarak verilmesi durumunda teşhis edebilme davranışlarını belirlemek için hazırlanan soru şöyledir:

Soru 4. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri fonksiyon değildir?

A) Reel sayıları 3'e eşleyen R' den R' ye bir bağıntı

B) n doğal sayısını, (100-n) sayısına eşleyen N den N ye bir bağıntı

C) Reel sayıları, karesine eşleyen R den R ye bir bağıntı

D) Pozitif reel sayıları, kareköküne eşleyen R+ dan R+ ya bir bağıntı

E) x reel sayısını, mutlak değeri x olan sayıya eşleyen R den R ye bir bağıntı

B şıkkında F1, E şıkkında F1 veya F2 durumu yoklanmak istenmiştir. Öğrencilerin yanıtlarına bakıldığında; 4 kişinin B ve E seçeneklerini, 25 kişinin B seçeneğini, 5 kişinin E, 6 kişinin C, 7 kişinin A ve 3 kişinin de D seçeneğini işaretlediği görülmüştür. 9 kişi ise yanıt vermemiştir. Bu durumda öğrencilerin sözel ifadesiyle verilen bir bağıntıyı fonksiyon olarak teşhis edip edememe karşısında F1 bilgisi gerektiren durumlarda daha başarılı oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin %27' si bu soruda tamamen başarısız olmuştur. Yanlış cevaplar incelendiğinde, ortaya çıkan açıklamaların şu şekilde olduğu görülmüştür: Hem 4 hem -4 ikisi de 16 ile eşleşeceğinden C fonksiyon değildir (2 kişi). Bir sayı karesine eşit olamayacağından C fonksiyon değildir (1 kişi). Bir sayı iki sayıyla eşleşeceğinden C fonksiyon değildir (2 kişi). Böyle bir durum olamayacağından A fonksiyon değildir (6 kişi). Bir sayı kök dışına hem artı hem eksi çıkabileceğinden D fonksiyon değildir (2 kişi).

Açıklamalardan yanlış karar verilmesine neden olan faktörler şu şekilde gruplanabilir:

(i) Sabit fonksiyonun bir kuralının olamayacağının düşünülmesi (6, %46).

(ii) Fonksiyonun yönünün doğru algılanmaması (6, %46)

(iii) Eşleme ile eşitleme kelimelerinin aynı görülmesi (1, %8)

Yanlış yanıt veren 16 öğrenciye ait veriler incelendiğinde; 5' inin (%32) gerekli tanım bilgisine sahip olmadığı görülmektedir. Bu durumda tanım bilgisindeki yetersizliğin bu soruda başarısız olmada önemli bir faktör

olduğu düşünülebilir.

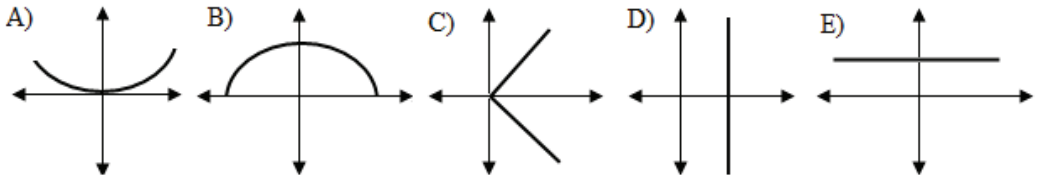
Diğer taraftan, 39 kişinin bu soruyu yanıtlamak için gerekli olan F1 veya F2 düzeyinde tanım bilgisine sahip olduğu tespit edilmiş ancak bunlardan 11' i bu soruya doğru yanıt verememiştir. Bu durumda tanımsal bilginin sözel ifadesi verilmiş bir bağıntının fonksiyon olarak teşhis edilip edilememesi durumuna her zaman transfer edilemediği söylenebilir (edilememesi oranı %28).

2. ve 4. soruların seçeneklerine bakıldığında; 2. soruda sembolik olarak, 4. soruda ise aynı şıkkı sözel ifadesiyle verilmiştir. Veriler incelendiğinde, 2. sorunun B seçeneğini işaretleyen 17 kişiden 5'i 4. sorunun B seçeneğini (%29) işaretlemiştir. Bu durumda, bu tip sorularda matematiksel ifadenin daha anlaşılır olduğu söylenebilir. İkinci sorunun B seçeneğini toplam 34; 4. sorunun B seçeneğini toplam 29 kişinin işaretlemesi bu yorumu desteklemektedir. 2. sorunun E seçeneğini işaretleyen 2 kişiden hiçbiri 4. sorunun E seçeneğini işaretlemiştir. Bu durumda matematiksel ifadenin daha anlaşılır olduğu söylenebilir. 2. sorunun E seçeneğini işaretleyen toplam 7, 4. sorunun E seçeneğini işaretleyen toplam 5 kişi olduğu göz önüne alındığında yine bu tip sorularda matematiksel ifadenin anlaşılma oranının daha yüksek olduğu söylenebilir. Sonuç olarak, fonksiyon kavram bilgisi, fonksiyonun cebirsel ifade edilmesi sözel ifade edilmesi durumuna nazaran daha yüksek bir oranda transfer edilmektedir.

Grafiksel Gösterim

Beşinci soru öğrencilerin bir fonksiyonun, grafiksel olarak verilmesi durumunda teşhis edebilme davranışlarını belirlemek için hazırlanmıştır.

Soru 5. Aşağıdaki grafiklerden hangileri bir fonksiyona ait olamaz?



Bu sorunun yapılması için gerekli olan tanım bilgisi F2' dir. Yanıtlar incelendiğinde 20 kişi C, 5 kişi D ve 8 kişi C ve D seçeneklerini işaretlemiştir. Öğrencilerin %44' ü ise tamamen başarısız olmuştur. Yanlış yanıtlara bakıldığında 3 kişi A, 1 kişi A ve B, 6 kişi D ve E, 2 kişi A, B, C, 3 kişi E, 1 kişi B, D, E ve 1 kişi tüm seçenekleri işaretlemiştir. D ve E seçeneklerini işaretleyenlerin açıklamalarına bakıldığında, düz çizginin fonksiyon olamayacağının; açıkta eleman kalacağının; birden fazla eşleşme olacağının belirtildiği görülmüştür. E şıkkını işaretleyen 3 kişi, bir elemanın birden fazla elemanla eşleşmesini; farklı elemanların aynı elemanla eşleşmesini; çizilecek yatay doğruların grafiği her yerde kesmesini neden göstermiştir. A, B, C şıklarını ve tüm şıkları işaretleyen 2 kişi yatay ve dikey olarak çizilecek çizgilerin grafiği birden fazla noktada kesmesini neden göstermiştir. A ve B seçeneklerini işaretleyen kişi bunun nedeni olarak fonksiyon grafiğinin düz olamayacağını, B, D ve E seçeneklerini işaretleyen kişi ise bu seçeneklerdeki grafiklerden birden fazla eşleşmenin olacağını sonucunu çıkarmıştır.

Yanlış yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin yaptıkları hataların şunlar olduğu söylenebilir: Tek bir sayıyla eşleşme fonksiyon olmaz (sabit fonksiyon, düz çizgi), tanım ve değer kümelerinin tüm reel sayılar olacağını varsayma, grafiği sıralı ikililer kümesi olarak incelemede hata yapma, fonksiyon kontrolü yaparken hem yatay hem dikey çizgi kontrolü yapma.

Diğer taraftan yanlış yanıt veren 17 kişiden 8' inin (%47) gerekli tanım bilgisine sahip olmadığı görülmüştür. Bu durumda tanım bilgisindeki yetersizliğin bu soruda başarısız olmada önemli bir faktör olduğu söylenebilir.

36 kişinin bu soruyu yanıtlamak için gerekli olan F2 düzeyinde tanım bilgisine sahip olduğu tespit edilmiş ancak bunlardan 9' u bu soruya doğru yanıt verememiş yani tanımsal bilgilerini transfer edememiştir (edilememesi oranı %25).

Tablo Gösterimi

Soru 6. Aşağıda aldığı değerler tablo şeklinde verilen bağıntılardan hangisi x için verilen {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinden, doğal sayılara bir fonksiyon değildir?

	0	1	2	3	4	5
A) f(x)	5	8	8	14	17	20
B) g(x)	12	8	4	0	- 4	7
C) h(x)	0	1	4	9	16	25
D) r(x)	5	5	5	5	5	5
E) s(x)	0	0	0	0	0	0

Bu sorunun yapılması için gerekli olan fonksiyon tanım bilgisi F1' dir. Yanıtlar incelendiğinde 47 kişi B, 2 kişi A, 2 kişi A ve B, 2 kişi B (yanlış açıklamalı), 1 kişi D, 1 kişi E seçeneklerini işaretlemiş, 4 kişi ise yanıt vermemiştir. Öğrencilerin %20' sinin bu soruda tamamen başarısız olduğu görülmektedir. Yanlış açıklamalara bakıldığında; A' yı işaretleyen bir öğrenci, 1 ve 2 sayılarının tek yere gitmesini neden göstermiştir. Diğer bir öğrenci ise "f(x)=x+3 olursa f(2)= 11" olur şeklinde bir açıklama yapmıştır. Bu açıklamadan öğrencinin bir sayısal örüntü aradığı ve değerlerin bu şekilde işlemesi gerektiğini düşündüğü görülmektedir. Herhangi bir kural olmadığından 2 kişi A ve B seçeneklerini, 2 kişi de B seçeneğini; D ve E seçeneklerini işaretleyen birer kişi de bu şekilde bir kural yazılamayacağını neden göstermiştir. Yanlış açılamalar incelendiğinde hataya neden olan faktörlerin genellikle bir fonksiyon kuralı arama olduğu söylenebilir.

Yanlış açıklama yapan öğrencilerin %38' sinin F1 bilgisine sahip olmadığı tespit edilmiştir. Bu durumda tanım bilgisindeki yetersizliğin bu soruda başarısız olmada önemli bir faktör olduğu düşünülebilir. Diğer taraftan gerekli tanımsal bilgiye sahip 35 öğrenciden 3' ünün soruya doğru yanıtlayamayarak bilgisini transfer edemediği görülmüştür (edilememesi oranı %9).

Gerçek Yaşam Durumları

Yedinci soru öğrencilerin bir fonksiyonu, yaşamdan bir örnek şeklinde verilmesi durumunda teşhis edebilme davranışlarını belirlemek için hazırlanmıştır.

Soru 7) Aşağıdaki bağıntılardan hangisi/ hangileri fonksiyon değildir?

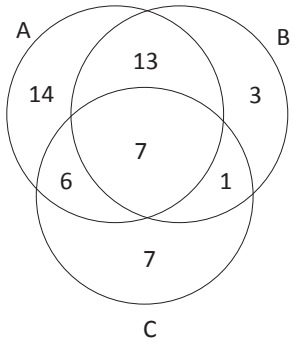
A) Okulunuzda bulunan öğretmenleri, girdikleri şubelere eşleyen bağıntı

B) Sınıfınızda bulunan kişileri, dersini aldığı öğretmenlere eşleyen bağıntı

C) 2007 yılı ÖSS sınavına giren tüm öğrencileri, yerleştikleri üniversitelere eşleyen bağıntı

D) Sınıfınızda bulunan kişileri, en sevdiği (diğerlerine göre) derse eşleyen bağıntı

A ve B seçenekleri için F2, C için F1 tanım bilgisi gereklidir. Öğrencilere ait doğru yanıtların dağılımı Şekil 1' de verilmiştir.



Şekil 1. *Yedinci soruya ilişkin bulgular*

40 kişinin A (%68), 24 kişinin B (%41) ve 21 kişinin ise C (%36) seçeneğini işaretlediği görülmektedir. Bu durumda; öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını fonksiyon olarak teşhis etmede F1' e göre F2 bilgisinin yer aldığı ifadelerde daha başarılı oldukları görülmektedir.

Yanlış yanıt veren 8 (%14) kişinin dağılımı şöyledir: 6 kişi D, 1 kişi B, 1 kişi A ve E. Yapılan açıklamalara bakıldığında; " Tanım ve görüntü kümeleri farklı olduğundan (A)", "tek eleman olduğundan (D)", "kesinlik bildirmediğinden (D)", "öğrenci sayısı fazla olacağından açıkta eleman kalır (A)" şeklinde olduğu görülmüştür. Yanlış yanıtlayan 8 kişiden 2' sinin (%25) gerekli fonksiyon tanım bilgisinin olduğu dolayısıyla bu yanlışı yapmalarının %75

oranında tanım bilgilerindeki yetersizlikten kaynaklı düşünülebilir.

Tartışma

1) Çalışmaya katılan öğrencilerin fonksiyon tanımı yaparken genelde sözel ifadeyi kullandıkları (%91) görülmüştür. Sembolik olarak yapılan ifadelerin ise tamamı anlamsız sembolik ifadelerden oluşmaktadır. Araştırmalar öğrencilerin genel olarak cebirde özel olarak da fonksiyonla ilgili notasyonlarda ve sembolik yazılımlarda zorluk çektiğini ortaya koymuştur (Ural, 2006). Akkoç (2005) tarafından yapılan bir çalışmada öğrencilerin sözel tanımı daha başarılı şekilde kullandıkları gözlemlenmiştir.

2) Öğrencilerin fonksiyon kavramını tanımlama girişimleri üç kategoriye ayrılmaktadır.

(I) "her eleman (tanım kümesindeki)", "yalnızca bir elemana (değer kümesindeki)", "bağıntı" ve "değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak şekilde" ifadelerinin bir kombinasyonu olarak ifade etme (%64),

(II) İki küme arasında bir eşleme/bağıntı olarak ifade etme (%14),

(III) Bir dönüştürme süreci olarak ifade etme (%7),

Sierpinska (1992) ve Vinner ve Dreyfus (1989) tarafından yapılan çalışmalarda öğrencilerin fonksiyonu tanımlamaları istenmiş ve öğrencilerin fonksiyonu bir işlem, eşleme, dönüştürme süreci olarak gördükleri, aynı zamanda doğrudan formal tanımlama yapmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Dede, Bayazit ve Soybaş (2010) tarafından yapılan çalışmada öğretmen adaylarının fonksiyon kavramı %87 oranında küme eksenli, %7 oranında dönüştürme mantığı içeren tanımlar şeklinde olduğu bulguları ile bu çalışmada elde edilen ve yukardaki (I) ve (II) maddelerindeki oranların toplamı olan %78 (küme eksenli) ile bir dönüştürme süreci olarak ifade etme (%7) oranları büyük ölçüde paraleldir.

3) Yanlış yanıtlar incelendiğinde, bir bağıntının fonksiyon olarak teşhis edilmesinde başarısızlığa yol açan önemli faktörler şunlardır:

(i) y=f(x) ifadesinde x' li terimin bulunması gerektiği, değer kümesindeki bir elemanın tanım kümesinde birden fazla elemanla eşleşmemesi gerektiği, tek bir elemanla eşleşmenin rasyonel olmadığının düşünülmesi şeklinde kavram yanılgıları,

(ii) Gerekli tanım bilgisine sahip olmama,

(iii) Fonksiyonun yönünün doğru algılanmaması

(iv) Fonksiyon kontrolü yaparken hem yatay hem dikey çizgi kontrolü yapılması.

Bu yanılgıların temelde fonksiyon tanım bilgisinin kavranmamış olmasından ve bazı ezbere işlemler yapılmasından kaynaklandığı düşünülebilir.

4) Öğrencilerin verilen bir fonksiyonu fonksiyon olarak teşhis etmelerini engelleyen faktörler genel olarak şunlardır:

a) Fonksiyon imajları açısından

- Fonksiyonun kuralında x' li terim olmalı
- Tablo olarak ifade edilmiş bir bağıntıdaki değerler bir örüntü/formül oluşturmalı,
- Değer kümesinde açıkta eleman kalmamalı,
- Eksenlere dik çizgiler fonksiyon grafiği olamaz, çünkü birden fazla eşleşmeler olur.
- Sabit fonksiyon gibi bir durum olamaz
- Sıfır bir fonksiyonun görüntüsü olamaz

b) Diğer Faktörler;

- Verilen temsil durumunun öğrencilerin genel prototipi olan Venn diyagramına dönüştürülmemesi sonucunda yanlış düşünmeler (örneğin eşleşmenin yönünün doğru algılanamaması, grafiğin sıralı ikililer kümesi olarak göz önüne alınmaması, sıralı ikililer kümesi olarak incelemede hata yapılması)
- Fonksiyon kontrolü yaparken hem yatay hem dikey çizgi kontrolünün yapılması,
- Eşleyen kelimesinin eşitleyen olarak düşünülmesi
- Sözel ifadelerin yeterince anlaşılamaması

Yapılan araştırmalarda öğrencilerin sabit fonksiyonu bir değişim veya değişken içermediğinden, fonksiyon olarak görmedikleri belirlenmiştir (Bakar ve Tall, 1992; Confrey ve Smith, 1991; Breidenbach ve diğerleri, 1992; Clement, 2001; Montiel, Vidakovich ve Kabael, 2008). Bu bulgu ile bu araştırmadan elde edilen bulgular (sabit fonksiyon durumunun olamayacağı, x içermeyenlerin fonksiyon olarak görülmemesi, eksenlere dik olan grafiklerin fonksiyon olarak teşhis edilmemesi gibi) örtüşmektedir.

5) Bazı öğrencilerin gerekli tanım bilgilerini verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığı durumuna her zaman transfer edemediği görülmüştür. Sahip olunan tanımsal bilgilerin transfer edilememe oranları, sıralı ikililer yönteminde %24, cebirsel formül yönteminde %20, sözel ifadede %28, grafikte %25, tabloda %9 ve gerçek yaşam durumunda %25 şeklindedir.

Bu sonuç Leinhardt ve diğ. (1990) ve Vinner&Dreyfus (1989) tarafından yapılan araştırma bulgularıyla tutarlılık göstermektedir. Yaptıkları çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramı tanımlamasını bildikleri ancak fonksiyonları teşhis ederken kişisel deneyimlerine daha fazla güvendikleri belirtilmiştir. Bu yüzden, yapılan hataların bir kavram yanılgısının sonucundan kaynaklanmadığı daha çok uygulamada öğrencilerin yanlış kavram bilgisiyle hareket etmelerinden kaynaklandığı vurgulanmıştır (Meel, 1999). Tall ve Vinner (1981)' e göre öğrenciler kendilerinden fonksiyon olanların belirlenmesi istenildiğinde, sahip oldukları kavram görüntüleri ve prototiplerin yönlendirmesiyle, kavramın formal tanımını göz ardı ederek cevap verirler.

Diğer taraftan, Akkoç (2006) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilerin sıralı ikili kümeleri temsillerine ait kavram görüntülerinde fonksiyon kavramının tanımsal özelliklerinin baskın olduğu, grafikler ve cebirsel ifadeler ise tanımsal özelliklerden yola çıkılmadığı belirtilmiştir. 7. maddedeki oranlar incelendiğinde bu araştırmada tam olarak bu şekilde bir kategorik bulguya rastlanmamıştır. Ancak sıralı ikili kümeleri temsillerine ait kavram görüntülerinde fonksiyon kavramının tanımsal özelliklerinin baskın olduğu söylenebilir (%76 oranında transfer edilebilmiştir).

Bu çalışmanın sonuçları doğrultusunda, öğrencilere fonksiyon kavramı öğretilirken kavramın çoklu temsillerine tanımsal bilginin nasıl uyarlanabileceği ve gerçek yaşam durumları içinde fonksiyon kavramını görmeleri yönünde öğretim etkinliklerinin düzenlenmesine önem verilmelidir ayrıca fonksiyon kavramının sembolik ifadelerini anlamaları ve kullanmaları sağlanmalıdır.

KAYNAKÇA

Akkoç, H. (2003). *Students' understanding of the core concept of function.* Unpublished EdD Thesis, University of Warwick, UK.

Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler. *Eğitim Araştırmaları Dergisi (Eurasian Journal of Educational Research), 5(20),* 14-24.

Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education), 30*, 1-10.

Altun, M. (1999). Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı Matematik Eğitimi. Prof. Dr. Aynur Özdaş (Ed), 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10. Bölümler. Eskişehir: Açıköğretim Fakültesi Yayınları, No: 591, ISBN. 975-492-825-8.

Bakar, M. & Tall, D. (1992). Students mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 23(1),*39-50.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23(3),* 247-285.

Brenner, M. E. Ve diğ. (1997). Learning by understanding: the role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34(4),* 663-689.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity and rate of change: a new approach to multiplication and exponential functions. In G.Harel & J. Confrey, (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics,* 291-330. Albany, NY: State University of New York.

Confrey, F. & Smith, E. (1991). A framework for functions: prototypes, multiple representations and transformations. In R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings of The 13th Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group For The Psychology of Mathematics Education,* 57-63, Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions?. *The Mathematics Teacher, 94(9)*, 745-748.

Dede, Y., Bayazit, İ. ve Soybaş, D. (2010). Öğretmen adaylarının denklem, fonksiyon ve polinom kavramlarını anlamaları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 18(1),* 67-88.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mmathematics Education, 24(2),* 94-116.

Gaea, L., Orit, Z. & Kay. S. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research. 60(1),* 1-64.

Geuther G. K. & Ferrini-Mundy, J. (1990). Functions and their representations. *Mathematics Teacher, 83(3),* 209-216.

Hauge, S. K. (1993). Functions and relations: some applications from database management for the teaching of classroom mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 365 519).

Kabael, U. T. (2010). Fonksiyon kavramı:Tarihi gelişimi, öğrenilme süreci, öğrenci yanılgıları ve öğretim stratejileri, *Tübav Bilim Dergisi, 3(1),* 128-136.

Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds), The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America Notes, 25,* 290-317.

Keller, B. A. & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 29 (1),* 1-17.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Malara N.A & Iaderosa, R (1999), Theory and Practice: a case of fruitful relationship for the renewal of the teaching and learning of algebra, *Proceedings of CIEAEM 50,* 38-54.

Malik, M A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 11(4),* 489-92.

Meel, D. E (1999). Prospective teachers' understandings: function and composite function. Issues in the Undergraduate Preparation of School Teachers: The Journal, 1.

Montiel, M., Vidakovic, D. & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems. *Investigations in Mathematics Learning*, *1(2),* 52-70.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function (ed. E. Dubinsky, G. Harel). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. *Mathematical Association of America Notes, 25,* 25-58.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education, 4,* 21-44.

Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi, 7(2),* 75–94.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, 14 (3)*, 293-305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 356-366.

Yıldırım ve Şimşek (2006). Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Summary

The aim of this research is to determine how students define the function concept, their concept images and their behaviors in the situations of transferring their concept definitions to real life. This research is a qualitative research and a case study. This study has been administered to 59 students in the tenth grade at an anatolia high school. The data was obtained from the three open ended questions (Define the concept of function, What do you understand from the concept of function?, Give an example for the function concept in real life stating domain and range).

Descriptive analyses were conducted to analyse the data. The responses given by the students were coded and then classified so common thema were obtained. While answering the questions the students usually used some of the words of "each" (1), "only one" (2), "relation" (3), "matching" (4) which are key words in the definition of function. So the answers were examined on the basis of the following codes.

F0: A matching between two sets.

F1: A matching each elements in domain into range

F2: A matching the elements in the domain into range provided that an element in the domain has only one image in the range

F3: A relation between two sets

F12: A matching each elements in domain into range provided that an element in the domain has only one image in the range

F13: A relation matching each element in domain into range

F23: A relation matching the elements in domain into range provided that an element in the domain has only one image in the range

F123: A relation matching the each elements in domain into range provided that an element in the domain has only one image in the range

F14: A matching each elements in domain into range provided that each elements in the range is matched.

F34: A relation matching the elements in domain into range provided that each elements in the range is matched.

D: A process transforming an object (input) to any different object (output) (for example, transformation of wheat into flour).

At the end of the research, it has been understood that students' knowledge of concept definition and concept images consist of the formal definition at the different forms and levels.

The conclusions obtained from the research are below:

1) 24% of the students know the complete formal definition of function (F123), 40% of them know this definition (F12, F13, F23), the others know it as either a matching between two sets (14%) or as a transforming process (7%). Only 9% of the students tried to symbolically describe the definition but all of descriptions were wrong.

2) It was determined that the students' understandings of the function fell into three categories. Those are:

(I) A combination of the words with the codes of "1","2" ve "3" (F123, F12, F13, F23, F34, F14, F1, F2) (56%)

(II) A matching or relation between two sets (F0, F3), (14%)

(III) A transforming process (D) (22%)

3) The answers given by the students to the question "give an example of the concept of function in real life explaining its domain and range" have been analysed in terms of method, domain and range, the rule and kind of the function. After analyzing the data; it has been determined that:

i) 46% of the students have given an example using the Venn diagram, 49% using a verbal expression, and 5% using an arrow diagram.

ii) While explaining domain and range of the function, 41% of students have given

directly each of the members of these sets, 59% of them have not defined these sets well.

iii) In most of the given examples using a Venn diagram, the image and range of the function are the same, so the type of the function has been one-to-one and onto (bijective function).

4) At the question of "define the concept of the function", despite that the rates of using the expression of the "D" is fairly small (7%), the fact that this ratio rises to 22% at the question of "What do you understand from the concept of function" is remarkable. It means that if the expression of "D" is used in the term of teaching the function concept, this expression makes sense for the students so the function concept in real life is meaningful for the students.

These results show that, most of the students are not successful enough in defining and understanding the concept of function or illustrating this concept in real life situtations.